Exercices et problèmes

14 Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit $D=r(C)$ et $E=r^{-1}(B)$.

On désigne par I le milieu du segment $[CD]$.

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement tel que $f(A)=D$ et $f(C)=A$.

b. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. Soit $g=f\circ r$.

a. Montrer que g est une translation.

b. Soit $F=g(E)$. Montrer que $f(B)=F$ et en déduire la nature du triangle BIF.

c. Montrer que les points C, A et F sont alignés.

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On note $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=8, b=6j$ et $c=8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$, B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. a. Placer les points A, B, C, A', B' et C'.

b. On note a', b', c' les affixes respectives des points A', B' et C'. Déterminer a', b', c'

c. Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

2. a. Calculer la distance $OA+OB+OC$.

b. Montrer que $1+j+j^2=0$.

3. Soit M un point du plan d'affixe z.

a. Montrer que $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj\right|=22$.

b. Montrer que $|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$, pour tous nombres complexes z, z', z''.

c. En déduire une condition sur M pour que la distance $MA+MB+MC$ soit minimale.

16 On considère deux triangles équilatéraux directs ABC et DEF.

On note G et H les points tels que EDBG et CDFH sont des parallélogrammes.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux manières (l'une utilisant les nombres complexes, l'autre utilisant les composées de déplacements) que le triangle AGH est équilatéral.

I/ Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct, on note a, b, c, d, e, f, g et h les affixes respectives des points A, B, C, D, E, F, G et H

1. Montrer que $c-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.

Exprimer $(f-d)$ à l'aide de $(e-d)$.

2. Exprimer g à l'aide de b, d et e.

Exprimer h en fonction de c, d et f.

3. Montrer que $h-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(g-a)$.

En déduire que le triangle AGH est équilatéral.

II/ On note t_1 la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$, t_2 la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$.

R la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $f=t_2\circ R\circ t_1$.

1. a. Justifier que f est une rotation et préciser son angle.

b. Déterminer l'image de B par f et en déduire le centre de la rotation f.

2. Déterminer l'image de G par f et montrer que le triangle AGH est équilatéral.

17 Soit ABCD un carré direct et de centre O du plan. Soit f l'antidéplacement qui transforme A en D et D en C.

1. Montrer que f est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Soit $E=f(C)$.

a. Montrer que DCE est un triangle isocèle, rectangle en C et direct.

b. Construire le point E.

c. Déterminer et construire l'image F du point B par f.

3. Déterminer et caractériser l'application $f\circ S_{(AD)}$.

18 On considère un rectangle ABCD et on désigne par O, I, J et K les milieux respectifs des segments $[AD]$, $[BC]$, $[OB]$ et $[OC]$.